<u>Références</u> :
Analyse pour l'agrégation, Hervé Queffélec
Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly
Analyse, Xavier Gourdon

Lemme.

- ω est croissante
- Pour $h_1, h_2 \in [0,1]$, $\omega_f(h_1+h_2) \leq \omega_f(h_1)+\omega_f(h_2)$.
- Pour $h \in [0,1], \lambda \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda.h \in [0,1]$, $\omega_f(\lambda h) \leq (\lambda+1)\omega_f(h)$.

Démonstration.

- Soit $h_1, h_2 \in [0,1]$ tels que $h_1 \leq h_2$ alors on a
$$\{|f(u)-f(v)|, |u-v| \leq h_1\} \subseteq \{|f(u)-f(v)|, |u-v| \leq h_2\}$$
d'où le résultat.
- Soit $h_1, h_2, u, v \in [0,1]$ tels que $|u-v| \leq h_1+h_2$.
Il existe $w \in [\min(u,v), \max(u,v)]$ tel que $|u-w| \leq h_1$ et $|w-v| \leq h_2$. On a donc
$$\begin{aligned} |f(u)-f(v)| &\leq |f(u)-f(w)|+|f(w)-f(v)| \\ &\leq \omega_f(h_1)+\omega_f(h_2) \end{aligned}$$
En passant au sup,
$$\omega_f(h_1+h_2) \leq \omega_f(h_1)+\omega_f(h_2).$$
- D'après l'étape précédente, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $h \in [0,1]$, $\omega_f(nh) \leq n\omega_f(h)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\lambda h \in [0,1]$. On a, tout d'abord, $\lfloor \lambda \rfloor \leq \lambda \leq \lfloor \lambda \rfloor + 1$. On a donc
$$\begin{aligned} \omega_f(\lambda h) &\leq \omega_f((\lfloor \lambda \rfloor + 1)h) \\ &\leq (\lfloor \lambda \rfloor + 1)\omega_f(h) \\ &\leq (\lambda+1)\omega_f(h) \end{aligned}$$

□

Théo. *Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue, ω son module de continuité ie*
$$\omega(h) = \sup\{|f(u)-f(v)| : |u-v| \leq h\}.$$
Pour $n \geq 1$, on considère le polynôme
$$B_n(f,x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$
le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Bernstein de f. Alors

(i) B_n converge vers f uniformément sur [0,1].

(ii) Plus précisément, on a $||f-B_n||_\infty \leq C\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, où C est une constante numérique.

Démonstration. (i) Soit $x \in [0,1]$, $X_1, ..., X_n$ un n-échantillon de loi de Bernouilli $B(x)$. Posons $S_n = X_1 + ... + X_n$. On sait donc que S_n suit une loi binomiale $B(n,p)$. On a donc
$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = B_n(x)$$
est un polynôme en le paramètre x.
Soit maintenant $||.||_\infty$ la norme sup sur [0,1] et soit $\delta \in]0,1[$.
On a
$$f(x) - B_n(x) = \mathbb{E}\left[f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right].$$

Ainsi, on obtient,

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(x)| &\leq \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\mathbb{1}_{|x-\frac{S_n}{n}|\leq\delta}\right. \\
&+ \left.\left|f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\mathbb{1}_{|x-\frac{S_n}{n}|>\delta}\right] \\
&\leq \omega(\delta)+2||f||_\infty\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{|x-\frac{S_n}{n}|>\delta}\right] \\
&\leq \omega(\delta)+2||f||_\infty\mathbb{P}\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|>\delta\right)
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Tchebychev et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|>\delta\right) &\leq \frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\delta^2} \\
&\leq \frac{nx(1-x)}{n^2\delta^2} \\
&\leq \frac{1}{4n\delta^2}
\end{aligned}$$

d'où

$$f(x)-B_n(x)\leq\omega(\delta)+\frac{||f||_\infty}{2n\delta^2}.$$

On a donc

$$||f-B_n||_\infty\leq\omega(\delta)+\frac{||f||_\infty}{2n\delta^2}.$$

Ensuite, on obtient

$$\overline{\lim}||f-B_n||_\infty\leq\omega_f(\delta).$$

Or f continue sur [0,1] compact donc f uniformément continue donc $\omega_f(\delta)\underset{\delta\to0}{\longrightarrow}0$. On obtient donc

$$||f-B_n||_\infty\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

(ii) On a

$$\begin{aligned}
|f(x)-B_n(x)| &\leq \mathbb{E}\left[f(x)-f\left(\frac{S_n}{n}\right|\right) \\
&\leq \mathbb{E}\left[\omega_f\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\right] \\
&\leq \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\mathbb{E}\left[\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right] \\
&\leq \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\mathbb{E}\left[\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)+1\right)
\end{aligned}$$

Or, on a aussi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right] &\leq \mathbb{E}\left[\left|x-\frac{S_n}{n}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}[1^2]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq Var\left(\frac{S_n}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\frac{1}{4n}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$|f(x)-B_n(x)|\leq\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\frac{1}{2\sqrt{n}}+1\right)=\frac{3}{2}\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

□

Théo (Weierstrass)**.** *Toute fonction continue $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ est limite d'une uniforme de polynômes.*

Démonstration. Posons, pour $x\in[0,1]$,

$$g(x)=f(a+(b-a)x)=f\circ\phi(x).$$

On a donc

$$||g - B_n||_\infty = ||f - B_n \circ \phi^{-1}||_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$\square$